

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Să se arate că

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

2. Se consideră matricele $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $A(\alpha) \cdot A(\beta) = A(\alpha + \beta)$.

b) Folosind inducția matematică și rezultatul de la punctul precedent, să se arate că

$$\left(A(\alpha) \right)^n = A(n\alpha), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Să se determine matricele X și Y care satisfac relațiile: $3X + 2Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$; $2X + Y = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Răspuns: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Să se determine matricea X din egalitatea

$$-5 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Răspuns: $X = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3/2 & 9 \\ 44 & -13/2 \end{pmatrix}$.

5. Fie polinomul $P(X) = X^3 - 4X^2 + 13X - 5$. Să se calculeze $P(A)$ pentru $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Răspuns: $P(A) = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

TEMA NR. 1

6. Fie matricea pătratică $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că A este inversabilă;

b) Să se determine inversa A^{-1} a matricei A .

Răspuns: a) $\det A = -4$;

$$b) A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1 & -1/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

7. Folosind transformările elementare aplicate liniilor unei matrice, să se calculeze inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

8. Să se determine rangul fiecăreia dintre matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Răspuns: $\text{rang } A = 2$; $\text{rang } B = 2$; $\text{rang } C = 3$.

9. Să se calculeze A^n , unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Răspuns: $A^n = 2^{n-1} A$

10. Determinați rangurile matricelor:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -12 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2\alpha & 5 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 2 & 1 \\ \alpha & 2\beta-1 & 3 & 1 \\ \alpha & \beta & \beta+3 & 2\beta-1 \end{pmatrix}$.

Discuție după $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Răspuns: a) $\text{rang } A = 2$; b) $\text{rang } A = 4$;

c) $\text{rang } A = \begin{cases} 2, & \text{dacă } \alpha = 3 \\ 3, & \text{dacă } \alpha \neq 3 \end{cases}$;

d) $\text{rang } A = \begin{cases} 2, & \text{pentru } \beta=1 \text{ sau } \beta=5 \text{ și } \alpha=0 \\ 3, & \text{în rest.} \end{cases}$

11. Să se rezolve ecuația matriceală $\bar{X} \cdot A = B$,

unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ i & -1 & 3i \\ -2 & 2i & -1-i \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$.

Răspuns: $\bar{X} = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3+11i & 3+9i & -1+7i \end{pmatrix}$.

12. Rezolvați ecuația matriceală $A \bar{X} = B$, unde

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Răspuns: $\bar{X} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Să se calculeze inversele matricelor:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 10 \\ -6 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$

14. Rezolvați ecuația matriceală $A \cdot X \cdot B = C$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{și } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns: $X = A^{-1} \cdot C \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

15. Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ x-2 & 1 & 2 \\ x-3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Răspuns: $x=2.$

16. Folosind proprietățile determinantilor, să se calculeze următorii determinanți

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix};$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 4 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{d) } \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

Răspuns: a) $(a-b)(b-c)(c-a); \quad \text{b) } 2abc(a-b)(b-c)(c-a);$
c) $70; \quad \text{d) } 37; \quad \text{e) } -23.$

17. Să se rezolve matriceal sistemul
$$\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 1, y = 1, z = 2$.

18. Să se discute și, în caz de compatibilitate, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Răspuns: a) dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ sistemul are soluția unică $x_1 = -\frac{m+1}{m+2}$; $x_2 = \frac{1}{m+2}$; $x_3 = \frac{(m+1)^2}{m+2}$.

b) dacă $m = -2$ sistemul este incompatibil

c) dacă $m = -1$ sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sunt date de:

$$x_1 = 1 - \alpha - \beta; \quad x_2 = \alpha; \quad x_3 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

19. Să se rezolve următoarele sisteme liniare:

a)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 + 11x_4 = 8 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 4 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = -20 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -10 \end{cases}$$

Răspuns: a) soluție unică: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = -2$

b) compatibil dublu nedeterminat $\begin{cases} x_1 = \frac{3-4\beta}{3}, x_2 = \frac{3\alpha+\beta}{3} \\ x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) simplu nedeterminat $x_1 = \alpha + 6, x_2 = 2\alpha + 6, x_3 = -6\alpha - 10, x_4 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

d) sistemul este incompatibil.